Mat. Böl. N. Analize Giriş 22.05.2018

1) $\int_0^2 \frac{1}{1+x^2}dx$ integralini $n=2$ için yamuk metodu yardımıyla hesaplayınız

2) $f(x)=\sqrt{\frac{1}{2^x}}$, $x_0=-2$, $x_1=0$, $x_2=2$ için $f(-1)$ değerini uygun interpolasyon polinomu yardımıyla bulunuz

3) $f(x)=e^{\frac{1}{2}x}$, $x_0=0$, $x_1=\ln 4$, $x_2=\ln 9$ olmak üzere e sayısını uygun interpolasyon polinomu yardımıyla hesaplayınız

4) $\int_0^1 \frac{15}{2}\ln(1+x)dx$ integralinin simpson yöntemi ile hesaplanmasında hatanın 10^{-4}den az olması için n değerini bulunuz

5) $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{l=0\\ l\neq i}}^{n}(x_i-x_l)}$ old. gösteriniz

6) $\int_{\frac{\pi}{2}(3-\sqrt{3})}^{\frac{\pi}{2}(3+\sqrt{3})} \frac{1}{(1+2\cos x)^2}dx$ integralini $n=2$ için Gauss yöntemi yardımıyla hesaplayınız.

Not: Sadece dört soru seçerek cevaplandırınız Başarılar
N.A

1) $n=2$ old.dan yamuk yöntemi $\int_0^2 \frac{1}{1+x^2}dx \approx \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{2}(f(x_{i-1})+f(x_i))$

$\approx \frac{h}{2}\left(f(x_0)+2f(x_1)+f(x_2)\right)$ olur. $a=0$, $b=2$, $n=2$ $\frac{b-a}{n}=h$

$\Rightarrow \frac{2-0}{2}=h \Rightarrow h=1$ $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$ olur.

$f(x_0)=f(0)=\frac{1}{1+0}=1$, $f(x_1)=f(1)=\frac{1}{1+1^2}=\frac{1}{2}$, $f(x_2)=f(2)=\frac{1}{1+2^2}=\frac{1}{5}$

$\int_0^2 \frac{1}{1+x^2}dx \approx \frac{1}{2}\left(1+2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{11}{5}=\frac{11}{10}$ olur.

2) $f(x)=\sqrt{\frac{1}{2^x}}$, $x_0=-2$, $x_1=0$, $x_2=2$ ayrık noktalar eşit aralıklı $(h=2)$ olduğu için ileri veya geri fark int. poli. uyg. $f(-1)$ için $x=-1$ old. dan ve -1 $x_0=-2$ ile $x_1=0$ arasında olduğu için ileri fark int. pol. uyg.

$f(x_0)=f(-2)=\sqrt{\frac{1}{2^{-2}}}=2=f_0$, $f(x_1)=f(0)=1$, $f(x_2)=f(2)=\sqrt{\frac{1}{2^2}}=\frac{1}{2}$

$P_2(x)=P_2(x_0+th)=f(x_0)+t\underbrace{\Delta f_0}+\frac{1}{2}t(t-1)\Delta^2 f_0$ $\quad (f(x_0)=f_0)$ $(f(x_1)=f_1,\ f(x_2)=f_2)$

$\Delta f_0=f_1-f_0=1-2=-1=\boxed{\Delta f_0}$

$\Delta^2 f_0=\Delta(\Delta f_0)=\Delta(f_1-f_0)=\Delta f_1-\Delta f_0=f_2-f_1-(f_1-f_0)=f_2-2f_1+f_0$

$=\frac{1}{2}-2\cdot 1+2=\boxed{\frac{1}{2}=\Delta^2 f_0}$

$x=x_0+th$, $x=-1$, $x_0=-2$, $h=2 \Rightarrow -1=-2+t\cdot 2 \Rightarrow t=\frac{1}{2}$

$P_2(-1)=2+\frac{1}{2}(-1)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{1}{2}-1\right)}_{-1/2}\right)\cdot\frac{1}{2}=2-\frac{1}{2}-\frac{1}{16}=\frac{23}{16}$ olur

— o — o —

3) $f(x)=e^{\frac{1}{2}x}$, $x_0=0$, $x_1=\ln 4$, $x_2=\ln 9$ ayrık noktalar eşit aralıklı olmadığı için sonlu farkların dışındaki int. poli uygulanabilir. e sayısını bulmak için $f(x)=e^{\frac{1}{2}x}$ de $x=2$ olmalıdır. $f(2)=e^{\frac{1}{2}\cdot 2}=e$ olur. O halde bizden istenen $x=2$ de yani $f(2)$, yani e değerini int. polinomu ile hesaplanması. Lagrange int. poli. uyg.

$$P_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

$$P_2(2)=\frac{(2-\ln 4)(2-\ln 9)}{-\ln 4\cdot -\ln 9}e^{\frac{1}{2}\cdot 0}+\frac{(2-0)(2-\ln 9)}{\ln 4\,(\ln 4-\ln 9)}e^{\frac{1}{2}\ln 4}+\frac{(2-0)(2-\ln 4)}{(\ln 9-0)(\ln 9-\ln 4)}\cdot e^{\frac{1}{2}\ln 9}$$

$$P_2(2)=\frac{(2-\ln 4)(2-\ln 9)}{\ln 4\ln 9}1+\frac{2(2-\ln 9)}{\ln 4\cdot\ln\frac{4}{9}}\cdot 2+\frac{2(2-\ln 4)}{\ln 9\ln\frac{9}{4}}\cdot 3\approx e \text{ dir.}$$

4) $\int_0^1 \frac{15}{2} \ln(1+x)\,dx$ int. simpson yöntemi ile hesaplanmasındaki hatanın 10^{-4} den az olması için $n=?$

Simpson yönt. hata $R(f) = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(IV)}(\eta)$

dir. Buna göre

$\frac{b-a}{180} h^4 |f^{(IV)}(\eta)| \leq 10^{-4}$ eşitsizliğinin sağlanması

için $n=?$ $b=1$, $a=0$ $h = \frac{b-a}{2m}$ $(n=2m) \Rightarrow h = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$

$f(x) = \frac{15}{2} \ln(1+x)$, $f'(x) = \frac{15}{2} \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = -\frac{15}{2} \frac{1}{(1+x)^2}$

$f'''(x) = \frac{15}{2} \frac{2}{(1+x)^3} = \frac{15}{(1+x)^3}$ $f^{(IV)}(x) = -\frac{15.3}{(1+x)^4} = -\frac{45}{(1+x)^4}$

$\left| f^{(IV)}(x) \right| \leq \left| -\frac{45}{(1+0)^4} \right| = \underline{\underline{45}}$ O halde

$\frac{1-0}{180} \cdot \frac{1}{n^4} \cdot 45 \leq \frac{1}{10^4} \Rightarrow \frac{1}{2.2.\cancel{45}} \cdot \frac{1}{n^4} \cdot \cancel{45} \leq \frac{1}{10^4}$

$\frac{1}{n^4} \leq \frac{4}{10^4} \Rightarrow n \geq \frac{10}{\sqrt[4]{4}}$, $\sqrt[4]{4} \cong 1,4 = \frac{14}{10}$

$n \geq \frac{100}{14} \approx 7,1$ olur. 10^{-4} den az olması istendiğinden $n \geq 8$ yani $n=8$ olmalıdır. n çift olması gerekir. $(n=2m)$

5) $f[x_0,x_1,\dots,x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{l=0\\ l\neq i}}^{n}(x_i-x_l)}$ old. gösterelim. Kolaylık olsun diye sağtarafın paydasını açık şekilde yazarsak eşitlik

$$f[x_0,x_1,\dots,x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$ olur.

Görüldüğü gibi paydada x_i-x_i yok

$n=1$ için $f[x_0,x_1] = \sum_{i=0}^{1} \frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)}$ old. göst. Soltaraf

$$f[x_0,x_1] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0-x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1-x_0}$$ olur. Eşitliğin sağ tarafı ise

$$\sum_{i=0}^{1} \frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)} = \frac{f(x_0)}{x_0-x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1-x_0}$$ olur. Dolayısıyla $n=1$ için eşitlik doğrudur.

$n\leq k$ için doğru olsun. Yani

$$f[x_0,x_1,\dots,x_k] = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_k)}$$ doğru olsun.

Göstereceğiz ki

$$f[x_0,x_1,\dots,x_k,x_{k+1}] = \sum_{i=0}^{k+1} \frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_k)(x_i-x_{k+1})}$$ old. göst.

$$f[x_0,x_1,\dots,x_{k+1}] = \frac{f[x_1,\dots x_{k+1}] - f[x_0,\dots,x_k]}{x_{k+1}-x_0}$$

$$= \frac{1}{x_{k+1}-x_0}\left(\sum_{i=1}^{k+1} \frac{f(x_i)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_k)(x_i-x_{k+1})} - \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_k)}\right)$$

Burada birinci toplamı $i=k+1$, ikinci toplamı $i=0$ için yazarsak

$$= \frac{f(x_{k+1})}{(x_{k+1}-x_1)(x_{k+1}-x_2)\cdots(x_{k+1}-x_k)(x_{k+1}-x_0)} - \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_k)(x_{k+1}-x_0)}$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \frac{f(x_i)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_k)(x_i-x_{k+1})(x_{k+1}-x_0)} - \sum_{i=1}^{k} \frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_k)(x_{k+1}-x_0)}$$

Ortak toplam sembolu altında yazacak olursak ilk iki terimide düzenlerek

5) devam

$$= \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_k)\underline{\underline{(x_0-x_{k+1})}}} + \frac{f(x_{k+1})}{\underline{\underline{(x_{k+1}-x_0)}}(x_{k+1}-x_1)\cdots(x_{k+1}-x_k)}$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} f(x_i)\left(\frac{1}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_k)(x_i-x_{k+1})(x_{k+1}-x_0)} - \frac{1}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_k)(x_{k+1}-x_0)}\right)$$ olur.

· Burada paydalarını eşitlersek

$$\frac{1 \quad x_i-x_0}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots\underline{\underline{(x_i-x_{k+1})}}(x_{k+1}-x_0)} - \frac{(x_i-x_{k+1})}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_k)(x_{k+1}-x_0)(x_i-x_{k+1})}$$

$$= \frac{\cancel{x_i}-\cancel{x_0}-\cancel{x_i}+\cancel{x_{k+1}}}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_k)(x_i-x_{k+1})\cancel{(x_{k+1}-x_0)}} =$$

$$= \frac{1}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_k)(x_i-x_{k+1})}$$ olur. Bunu yerine

yazarsak

$$= \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_k)(x_0-x_{k+1})} + \sum_{i=1}^{k}\frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_k)(x_i-x_{k+1})}$$

$$+ \frac{f(x_{k+1})}{(x_{k+1}-x_0)(x_{k+1}-x_1)\cdots(x_{k+1}-x_k)}$$ olur. Bunu toplam ile

yazılırsa

$$= \sum_{i=0}^{k+1}\frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_k)(x_i-x_{k+1})}$$ olur

6) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}(3-\sqrt{3})}^{\frac{\pi}{2}(3+\sqrt{3})} \frac{1}{(1+2\cos x)^2}\,dx$ int. sınırlarını $\int_{-1}^{1}$ getirirsek

veya dönüştürürsek $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt \approx f(-\frac{1}{\sqrt{3}})+f(\frac{1}{\sqrt{3}})$ olur.

$\int_a^b \longrightarrow \int_{-1}^{1}$ dönüşt için $x=\dfrac{(b-a)t+b+a}{2}$ dönüş uyg.

$a=\frac{\pi}{2}(3-\sqrt{3})$ $\quad b=\frac{\pi}{2}(3+\sqrt{3})$ old. göre $b-a=\cancel{\frac{3\pi}{2}}+\frac{\pi\sqrt{3}}{2}-\cancel{\frac{3\pi}{2}}+\frac{\pi\sqrt{3}}{2}=\pi\sqrt{3}$

$b+a=\frac{3\pi}{2}+\cancel{\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}+\frac{3\pi}{2}-\cancel{\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}=3\pi$ olur. O halde dönüşüm

$x=\dfrac{\pi\sqrt{3}\,t+3\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}(\sqrt{3}t+3)$ olur. $dx=\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\,dt$

$t=-1$ için $x=\frac{\pi}{2}(3-\sqrt{3})$ $\quad t=1$ için $x=\frac{\pi}{2}(\sqrt{3}+3)$ olur.

$$\int_{\frac{\pi}{2}(3-\sqrt{3})}^{\frac{\pi}{2}(3+\sqrt{3})} \frac{1}{(1+2\cos x)^2}\,dx = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\left[1+2\cos\left(\frac{\pi}{2}(\sqrt{3}t+3)\right)\right]^2}\,dt$$

$$\approx \frac{\pi\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\left[1+2\cos\left(\frac{\pi}{2}\underbrace{\left(\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+3\right)}_{2}\right)\right]^2}+\frac{1}{\left[1+2\cos\left(\frac{\pi}{2}\underbrace{\left(\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+3\right)}_{4}\right)\right]^2}\right)$$

$$\approx \frac{\pi\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{(1+2\underbrace{\cos\pi}_{-1})^2}+\frac{1}{(1+2\underbrace{\cos 2\pi}_{=1})^2}\right)$$

$$\approx \frac{\pi\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{(1-2)^2}+\frac{1}{(1+2)^2}\right) \approx \frac{\pi\sqrt{3}}{2}\left(1+\frac{1}{9}\right)=\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{10}{9}$$

$\approx \dfrac{5\pi\sqrt{3}}{9}$ olur.